

### 8-1 習題提示

1. 令  $u = x, dv = \sin \frac{x}{2} dx$  分部積分
6. 令  $u = \ln x, dv = x^3 dx$  分部積分
16. 令  $u = x^5, dv = e^{-p}$  分部積分(重複數次)或使用速解
19. 同 16
21. 令  $u = \sin \theta, dv = e^{\theta} dx$  分部積分, 需兩次
25. 先令  $x^2 = 3s + 9$  變數代換後再分部積分
28. 令  $u = \ln(x^2 + x), dv = dx$
36. 令  $u = \ln x$  變數代換
44. 令  $u = \sqrt{x}$  變數代換
46. 令  $u = \sqrt{x}$  變數代換後再分部積分
62. 令  $u = x^n, dv = \sin x$  分部積分

### 8-2

8.  $\sin^5 x = (\sin^2 x)^2 \sin x = (1 - \cos^2 x)^2 \sin x$
16.  $7\cos^7 t = (\cos^2 t)^3 \cos t = (1 - \sin^2 t)^3 \cos t$
17.  $8\sin^4 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2$
22.  $\sin^2 2\theta \cos^3 2\theta = \sin^2 2\theta (1 - \sin^2 2\theta) \cos 2\theta = \sin^2 2\theta \cos 2\theta - \sin^4 2\theta \cos 2\theta$
23.  $\frac{1 - \cos x}{2} = \sin^2 \frac{1}{2} x$
25.  $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$  注意開根號後要有絕對值以及積分範圍
31.  $2\sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$  注意開根號後要有絕對值以及積分範圍
35. 令  $u = \sec x$
38.  $\sec^4 x \tan^2 = (\tan^2 x + 1) \tan^2 x \sec^2 x$
53.  $\sin 3x \sin 3x = \cos 0 - \cos 6x$  積化和差
55.  $\cos 3x \cos 4x = \frac{1}{2} (\cos(-x) + \cos 7x)$
57.  $\sin^2 \theta \cos 3\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \cos 3\theta$  合併後積化和差

8-3

4.  $\tan^{-1} x$  的相關形式

7. 令  $t = 5\sin\theta$

10. 令  $x = \frac{3}{5}\sec\theta$

17. 令  $x = 2\tan\theta$

20.  $w = 3\sin\theta$

33.  $v = \sin\theta$

43.  $x^2 = \tan\theta$

46.  $u = x^{\frac{3}{2}}$

8-4

2.  $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$  後拆分式

5. 拆成  $z, z^2, z - 1$  三分式

8. 原式 =  $1 + \frac{-9t^2+9}{t^4+9t^2}$  拆成  $t, t^2, t^2 + 9$

16. 拆成  $x, x + 2, x - 2$

17. 原式 =  $x - 2 + \frac{3x+2}{(x+1)^2}$  拆成  $x + 1, (x + 1)^2$ .

20. 拆成  $x - 1, x + 1, (x + 1)^2$

24. 拆成  $(4x^2 + 1), (4x^2 + 1)^2$

33. 原式 =  $2x + \frac{1}{x^2+x}$

39. 令  $e^t = y$  後拆分式

42. 令  $\cos\theta = y$  後拆分式

8-7

2. 7.10.13.17.22.25.30.32

使用暇積分，判定是否收斂，若收斂則求值

32 因有絕對值注意需切成兩段積分

.

39. 令  $\frac{1}{x} = y$ ，變數變換(注意上下界也需要變動)

45. 分成  $[-1,0)$  和  $(0,1]$  兩段暇積分

54. 檢查  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{\sqrt[4]{x^4+1}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x^4}}}$  利用其性質和暇積分

58. 和  $\frac{1}{x}$  比較

61. 檢查  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{e^x-x}}}{\frac{1}{\sqrt{e^x}}}$  後利用其性質和暇積分

解答

8-1

$$1. -2x \cos \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{2} + C$$

$$6. \frac{3e^4 + 1}{16}$$

$$16. (-p^4 - 4p^3 - 12p^2 - 24p - 24)e^{-p} + C$$

$$19. (x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)e^x + C$$

$$21. \frac{1}{2}(e^\theta \sin \theta - e^{-\theta} \cos \theta) + C$$

$$25. \frac{2}{3}(\sqrt{3s+9}e^{\sqrt{3s+9}} - e^{\sqrt{3s+9}}) + C$$

$$28. x \ln(x + x^2) - 2x + \ln|x + 1| + C$$

$$36. \frac{1}{4}(\ln x)^4 + C$$

$$44. 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$$46. 2xe^{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + 4e^{\sqrt{x}} + C$$

$$62. -x^n \cos x + \int nx^{n-1} \sin x dx$$

8-2

$$8. \frac{16}{15}$$

$$16. 7 \sin t - 7 \sin^3 t + \frac{21}{5} \sin^5 t - \sin^7 t + C$$

$$17. 3\pi$$

$$22. 0$$

$$23. 4$$

$$25. 2$$

$$31. \sqrt{2}$$

$$35. \frac{1}{3} \sec^3 x + C$$

$$38. \frac{1}{5} \tan^5 x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C$$

$$53. \pi$$

$$55. \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{14} \sin 7x + C$$

$$57. \frac{1}{6} \sin 3\theta - \frac{1}{4} \sin \theta - \frac{1}{20} \sin 5\theta + C$$

8-3

$$4. \frac{\pi}{16}$$

$$7. \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{t}{5} + \frac{t\sqrt{25-t^2}}{2} + C$$

$$10. \ln \left| \frac{5}{3}x + \frac{\sqrt{25x^2-9}}{3} \right| + C$$

$$17. \frac{1}{3}(x^2 - 8)\sqrt{x^2 + 4} + C$$

$$20. \sin^{-1} \frac{w}{3} + C$$

$$33. \frac{1}{3} \left( \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \right)^3 + C$$

$$43. \frac{1}{2} \ln |\sqrt{1+x^4+x^2}| + C$$

$$46. \frac{2}{3} \sin^{-1} x^{\frac{3}{2}} + C$$

8-4

$$2. \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-1}$$

$$5. \frac{-2}{z} + \frac{-1}{z^2} + \frac{-1}{z+2}$$

$$8. 1 + \frac{1}{t^2} + \frac{-10}{t^2+9}$$

$$16. \frac{1}{16} \ln \left| \frac{(x-2)^5(x+2)}{x^6} \right| + C$$

$$17. 3 \ln 2 - 2$$

$$20. \frac{\ln|(x-1)(x+1)^3|}{4} + \frac{1}{2(x+1)} + C$$

$$24. \tan^{-1} 2x - \frac{1}{4x^2+1} + C$$

$$33. x^2 - \ln|x| + \ln|x-1| + C$$

$$39. \ln \left( \frac{e^t+1}{e^t+2} \right) + C$$

$$42. -\frac{1}{3} \ln \left| \frac{\cos\theta-1}{\cos\theta+2} \right| + C$$

8-7

2.1000

7. $\frac{\pi}{2}$

10. $\frac{3\pi}{4}$

13.0

17 $\pi$ .

22.1

25. $-\frac{1}{4}$

30. $\frac{\pi}{6}$

32.4

39.converges

45converges.

54.diverge

58.diverges

61.converge