

10-1

3. 單純代入 $n = 1, 2, 3, 4$ 即可

9. 單純代入 $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ 即可

16. 觀察為正負相間，下方分母部分可看為 $1^1, 2^2, 3^2, \dots$

19. 同 16. 為平方形式但可能需要做 $+$, $-$ 調整

27. 觀察 0.1^n , $\lim_{n \rightarrow \infty} 0.1^n = ?$

31. 原式可寫為 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n^4}{n^4}$

36. 需考慮 $\lim_{n \rightarrow \infty} -1^n = ?$

43. 考慮 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = ?$

54. 考慮自然指數 e 的定義

57. 改寫為 $\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{n}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}}}$

63. 原式可看為 $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n} = \frac{1}{n} * \frac{2}{n} * \dots * \frac{n}{n}$

71. 原式可改為 $x * e^{-\ln(2n+1)^{\frac{1}{n}}}$

84. 同 71，寫成 e^{\ln} 型式

86. L'Hôpital's rule

89. 原式 = $\frac{\ln n}{n}$

10-2

7. 直接使用等比級數公式

13. 可以拆成兩個後分別使用等比級數公式

44. 拆分式拆成兩項

45. 列出幾項後即可看出規律

47. 同 45

20. 改為 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{234}{1000} \left(\frac{1}{10}\right)^n$

25. 同 20

30. 可看為 $\frac{1}{n}$

33. 檢查 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{n}$

49. 等比級數公式，但請檢查公比是否落在 $(-1, 1)$

54. 找出其公比，使用等比級數公式

58. 等比級數

60. 檢查是否 $n \rightarrow \infty$, 原式 = 0

67. 檢查是否公比落在 $(-1, 1)$

75.等比級數，則利用公比來找出 x 的範圍

78.同 75

10-3

3.可直接積分或利用 $\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^2+4}$ where $n > 0$ 後對 $\frac{1}{n^2}$ 積分

6.直接積分，使用變數變換 $n = \ln n$ 。

9.直接積分，使用分部積分

15.使用 P 值法判定

19.直接積分。

22. L'Hôpital's rule 後判定

27.同 22

28. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = ?$

30.判斷 $\ln 3$ 為 >1 , or <1 後，使用等比級數

36.同 28 的概念

38.同 22

10-4

1.和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 比較

6.和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 比較

10.和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 比較

14.和 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{5})^n$ 比較

17. 使用 Limit Comparison Test、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

19.和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 比較

28.使用 Limit Comparison Test、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

34.和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 比較

38.檢查內部算式取極限後是否為 0

51. Limit Comparison Test、 $\frac{1}{n}$

53.原式可整理成 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ ，使用 Limit Comparison Test 和 $\frac{1}{n^2}$

10-5

3.6.12.13.18.20.

單純使用 Ratio Test

23. 27. Direct Comparison Test

32.36.38 Ratio test

10-6

2. 檢查是否 converges absolutely，若是則 converges by the Alternating Convergence Test

11.13

Alternating Series Test

16. Direct Comparison Test，檢查是否 converges absolutely

20. nth-Term Test

25. 可看為 $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

30. 先證明 converges conditionally (證明其單調遞減且 $a_n \rightarrow 0$ when $n \rightarrow \infty$) 後使用 Direct Comparison Test

39. 42.

nth-Term Test

44. 同 30，但後使用 Limit Comparison Test

10-7

3. 等比級數，利用公比去找收斂範圍

8. 利用 ratio test 找出收斂範圍

11. 同 8

15. 同 8

23. 同 8

34. 同 8

36. $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ，使用 ratio test

10-8

5.10. 單純微分展開泰勒，分別寫出 1、2、3 階的泰勒展開式

12. 15 Maclaurin series. 就是在 $x = 0$ 時展開的泰勒展開式

23.27.30

照表操課即可，在 a 點展開則帶入 a ，請勿忘記。

解答:

10-1

$$3. -\frac{1}{7}$$

$$9. a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = -\frac{1}{2}, a_4 = -\frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{8}, a_6 = \frac{1}{16}, a_7 = -\frac{1}{32}, a_8 = -\frac{1}{64}, a_9 = \frac{1}{128}, a_{10} = \frac{1}{256}$$

$$16. a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, n = 1, 2, \dots$$

$$19. a_n = n^2 - 1, n = 1, 2, \dots$$

27. converge to 2

31. converge to -5

36. diverges

43. converge to 1

54. converge to e^{-1}

57. converge to 1

63. converge to 0

71. converge to $x, x > 0$

84. converge to 1

86. converge to 0

89. converge to 0

10-2

$$7. \frac{4}{5}$$

$$13. \frac{17}{6}$$

$$20. \frac{234}{999}$$

$$25. \frac{41333}{33000}$$

30. 0

33. diverge

44. 1

45. 1

$$47. -\frac{1}{\ln 2}$$

$$49. 2 + \sqrt{2}$$

$$54. \frac{5}{6}$$

$$58. \frac{x}{x-1}$$

10-3

- 3.converge
- 6. converge
- 9. converge
- 15.diverge
- 19.diverge
- 22.diverge
- 27.diverge
- 28.diverge
- 30.converge
- 36.converge
- 38.diverge

10-4

- 1. converge
- 6. converge
- 10.diverge
- 14. converge
- 17.diverge
- 19. converge
- 28. converge
- 34. converge
- 38.diverge
- 51.diverge
- 53. converge

10-5

- 3.diverge
- 6.diverge
- 12.diverge
- 13. converge
- 18. converge
- 20.diverge
- 23. converge
- 27. converge
- 32. converge
- 36. converge
- 38. converge

10-6

- 2. converge
- 11. converge

- 13. converge
- 16. converge
- 20. diverge
- 25. diverge.
- 30. diverge
- 39. diverge
- 42. diverge
- 44. diverge

10-7

3. where $-\frac{1}{2} < x < 0$ absolute convergence

8. where $-3 < x < 1$ absolute convergence, where $x = 1$ conditional converge

11. absolute convergence for all x

15. where $-1 < x < 1$ absolute convergence, where $x = -1$, conditional converge

23. where $-1 < x < 1$ absolute convergence

34. only absolute converge at $x = 0$

36. where $2 < x < 4$ absolute converge, where $x = 2$, conditional converge

10-8

$$5. P_0(x) = \frac{1}{2}, P_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2), P_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2, P_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3$$

$$10. P_0(x) = 1, P_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x, P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2, P_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3$$

$$12. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)} x^n$$

$$15. 3x - \frac{3^3 x^3}{3!} + \frac{3^5 x^5}{5!} - \dots$$

$$23. 8 + 10(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3$$

$$27. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n$$

$$30. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(\ln 2)^n (x-1)^n}{n!}$$