小考 1 參考解答。另外提醒各位同學

$\log a^b$ 和 $(\log a)^b$ 是不同的，請不要搞混了。

1.(a) $y = \int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \log_5 \sqrt{t}\, dt$ find $\frac{dy}{dx}$

上界微分*上界代入-下界微分*下界代入。

因此 $\frac{dy}{dx} = 2x\left(\log_5 \sqrt{x^2}\right) - x\left(\log_5 \sqrt{\frac{x^2}{2}}\right) = 2x(\log_5|x|\,) - x(\log_5|x|) + \frac{1}{2}\log_5 2$

(b) $y = \sqrt[3]{\frac{x^2(x-1)}{x^2+1}}$ 利用取 log 後連鎖率簡化微分過程

$$\ln y = \frac{1}{3}[2\ln x + \ln(x-1) - \ln(x^2+1)], \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left[\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2+1}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x^2(x-1)}{x^2+1}}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2+1}\right]$$

2(a) $\frac{d}{dx}a^x = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$ 其中 $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$ 可看成只與 a 有關的函數，令為 g(a)，假設現在有一 e 使 $g(e) = 1,$，令 $h = \frac{1}{n}, g(e) = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} - 1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}, e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

最後證明出 $\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}$ 亦可。

2.(b) $\int_2^4 x^{2x}(1+\ln x)dx$, 令 $u = x^{2x}, du = x^{2x}(2\ln x + 2)dx$

原式 $=\int_{2^4}^{4^8} \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}[4^8 - 2^4] = 2^{15} - 2^3 = 32670$

3.(a) $\lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1+}\left(\frac{\ln x-(x-1)}{\ln x(x-1)}\right) = \lim_{x\to 1+}\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}+\ln x} = \lim_{x\to 1+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}$

3.(b) $\lim_{x\to e+}(\ln x)^{\frac{1}{x-e}} = \lim_{x\to e+} e^{\ln(\ln x)^{\frac{1}{x-e}}} = e^{\lim_{x\to e+}\frac{\ln(\ln x)}{x-e}} = e^{\lim_{x\to e+}\frac{\frac{1}{\ln x}*\frac{1}{x}}{1}} = e^{\frac{1}{e}}$

4.(a) $\int \frac{1}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}}dx$ 令 $x = \sin u, dx = \cos u\, du.$

原式 $=\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c = \ln|\sin^{-1}x| + c$

4.(b) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x+1)^2-1}}$, 令 $u = x+1, du = dx$

原式= $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$, 令 $\mathrm{t}=\sqrt{\mathrm{u}^2-1}, \mathrm{dt}=\frac{\mathrm{u}}{\sqrt{u^2-1}}\mathrm{du}$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}=\int \frac{dt}{t^2+1}=\tan^{-1} t+c=\tan^{-1}\sqrt{(x^2+2x)^2-1}+\mathrm{C}$$

(寫成$\sec^{-1}(x+1)+\mathrm{C}$ 亦會給分