第二次小考 參考解答

1. What is the definition of the improper integrals?

   Sol：

   type I： $\forall \mathrm{x}, \mathrm{f(x)}$ is continuous. then we have：

$$\int_{a}^{\infty} \mathrm{f(x)dx} = \lim_{\mathrm{b}\to\infty} \int_{a}^{b} \mathrm{f(x)dx} \quad 、 \quad \int_{-\infty}^{a} \mathrm{f(x)dx} = \lim_{\mathrm{b}\to\infty} \int_{b}^{a} \mathrm{f(x)dx}$$

   Type II：for $\mathrm{c} \in [a, b]$,$\mathrm{f(x)}$ is continuous on $[a, b]$ except c. Then we have:

$$\int_{a}^{b} \mathrm{f(x)dx} = \lim_{t\to c^-} \int_{a}^{t} \mathrm{f(x)dx} + \lim_{t\to c^+} \int_{t}^{b} \mathrm{f(x)dx}$$

2. Evaluating improper integrals：

$$\int_{0}^{4} \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{|x-2|}}$$

   Sol：use improper integral type II

$$\int_{0}^{4} \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{|x-2|}} = \lim_{\mathrm{b}\to 2^-} \int_{0}^{b} \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{|x-2|}} + \lim_{\mathrm{b}\to 2^+} \int_{b}^{4} \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{|x-2|}}$$

$$= \lim_{\mathrm{b}\to 2^-} \int_{0}^{b} \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{2-x}} + \lim_{\mathrm{b}\to 2^+} \int_{b}^{4} \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{\mathrm{b}\to 2^-} \left[-2\sqrt{2-x}\right]_{0}^{b} + \lim_{\mathrm{b}\to 2^+} \left[-2\sqrt{x-2}\right]_{b}^{4} = 4\sqrt{2}$$

   註：沒寫到瑕積分直接積分的一律 0 分，即使你有分開積分也一樣。

   另外，請一定要寫極限符號，不要在積分範圍上寫個+或-就了事，那不是正式寫法。

3. Express the number $1.24\overline{123} = 1.24123123123$ ...as the ratio of two integers.

   Sol：

$$1.24\overline{123} = \frac{124}{100} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{123}{10^5}\left(\frac{1}{10^3}\right)^n = \frac{124}{100} + \frac{\frac{123}{10^5}}{1-\left(\frac{1}{10^3}\right)} = \frac{124}{100} + \frac{123}{10^5 - 10^2}$$

$$= \frac{124}{100} + \frac{123}{99900} = \frac{123990}{99900}$$

   註：寫到這裡就可以，但是如果不是寫成”兩個整數相除”的形式會被扣分，因為不符合題目要求。

4. Determining convergence or divergence?

4(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n(n+1)!}{3^n n!}$

Sol：

By ratio test：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{a}_{\mathrm{n}+1}}{\mathrm{a}_{\mathrm{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^{n+1}(n+2)!}{3^{n+1}(n+1)!} \times \frac{3^n n!}{n2^n(n+1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right) < 1$$

So, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n(n+1)!}{3^n n!}$ is convergence by ratio test.

4(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$

Sol:

By comparison test：

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, and we know that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ is grometeic series. $|r| < 1$,

so $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, is converge, and by comparison test, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$ is converge.

註：$\lim_{n\to\infty} \sin n$ 雖不會跑至無窮大但當 n 跑至無窮大時你無法確認$\sin n$ 為多少，因此當 n 跑至無窮大時其極限值不存在！另外，這題有人直接用 nth series test 來做，請回去翻講義，這定理是檢驗”是否發散”用的，即便其第 n 項極限收斂至 0 也無法直接推得此級數收斂，請注意！

4(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Sol：

By ratio test：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{a}_{\mathrm{n}+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

so, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ is converge by ratio test.

註：這題有人使用 root test 來做，並且寫$\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}} = 1$，這完全是錯的。

即使開了 n 次方根 n!還是會跑到發散去(相關證明可以在網路上找一下，因為是範圍外所以我就不在這裡列出了。)，另外還有人用$\mathrm{n^n}$的成長較 n!還快因此本級數收斂，先不說你在證明的是級數而非數列，這樣寫就已經倒因為果(是先證明此”數列”極限為 0 才能說其$\mathrm{n^n}$的成長較 n!快。

4(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+\mathrm{n}}$

Sol：

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+\mathrm{n}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{n\times(n+1)}{2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n}, \text{by limit comparison test, we use } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2+n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+n} = 2, \text{and} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ is converge by P} - \text{series test.}$$

so, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+\mathrm{n}}$ is converege by limit comparison test.

註：注意一下這題若使用 ratio test 會因為比值為 1 而失敗，另外有人整理出$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n}$,的形式後就直接下結論因 P-series test 而收斂，這樣會有問題，因為這不是 P-series test 中寫到的形式，必須向我上面這樣對$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$使用 P-series test，然後再根據其他收斂定理(如limit comparison test或comparison test)，然後才能說原式收斂。

最後跟各位說一下，請各位注意一下各個定理使用的”前提條件”，如果不滿足

其條件就使用我不會給分(即使後來導出的結論碰巧相同)。

舉例來說有人用comparison test，$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_n < \lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}b_n$

其中$\sum_{n=0}^{\infty}b_n$diverge,然後就下結論說$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$也 diverge，或是上面也有提到的檢驗$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$是否收斂，$\lim_{n\to\infty}a_n$收斂因此就下結論$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$收斂。

以上，祝各位剩下的考試順利。